Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

$1^{\underline{o}}$ Esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica   Compito (A)
26–01-08   A.A. 2007/2008

Si scrivano i passaggi essenziali negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (5) Siano z_1 e z_2 con $|z_1| > |z_2|$ le soluzioni della equazione $z^2 - z(2\sqrt{3}+i) + 2\sqrt{3}i = 0$. Si calcoli $(z_1 + 2z_2)^{19}$. Si mostrino i passaggi

La formula delle equazioni di secondo grado dà $z_1 = 2\sqrt{3}$, $z_2 = i$ per cui $z_1 + 2z_2 = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 4e^{i\frac{\pi}{6}}$ da cui $(z_1 + 2z_2)^{19} = 2^{38}e^{i\frac{19\pi}{6}} = -2^{38}e^{i\frac{\pi}{6}+3i\pi} = -2^{38}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$

Problema n.2 (25) Sia data la funzione $(\frac{2z^3-1}{z^2})\frac{1}{z^2-6z+8}$.

1) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $2 < |z| < 4$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

In generale si ha $K(2z - \frac{1}{z^2})\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = K(2z - \frac{1}{z^2})(\frac{A}{z-z_1} + \frac{B}{z-z_2})$ dove $0 < |z_1| < |z_2|$ e K vale 1 per i compiti A e C e 1/2 per i compiti B e D. Per calcolare A e B in modo rapido conviene fare $A = \lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2} = \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)'}{(z^2-(z_1+z_2)z+z_1z_2)'} = \frac{1}{z_1-z_2}$ e quindi $B = \frac{1}{z_2-z_1}$.
Abbiamo quindi A: $z_1 = 2$, $z_2 = 4$ B: $z_1 = 1$, $z_2 = 3$, C: $z_1 = -1$, $z_2 = -4$, D $z_1 = -1$, $z_2 = -3$.
Per lo sviluppo si ha $f(z) = K(2z - \frac{1}{z^2})(\frac{A}{z(1-\frac{z_1}{z})} + \frac{B}{z_2(\frac{z}{z_2}-1)}) = K(2z - \frac{1}{z^2})\Big(\frac{A}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z_1}{z})^k - \frac{B}{z_2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{z_2})^k\Big)$ e c_{-2} si ottiene prendendo nella prima somma $k = 3$ nella prima somma e $k = 0$ nella seconda somma. $c_{-2} = K(2Az_1^2 + \frac{B}{z_2})$ e quindi A: $-31/8$, B: $-5/12$, C: $33/8$, D: $7/12$. Si noti che l'insieme di convergenza della somma delle due serie è esattamente quello richiesto nel testo

2) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $0 < |z| < 2$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

Non ci vuole molto ad osservare che lo sviluppo è $K(2z - \frac{1}{z^2})\Big(-\frac{A}{z_1}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{z_1})^k - \frac{B}{z_2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z}{z_2})^k\Big)$ ed il coefficiente c_{-2} si ottiene prendendo $k = 0$ nella prima e seconda serie avendone $c_{-2} = KA/z_1 + KB/z_2$ e quindi A: $-1/8$, B: $-1/6$, C: $-1/8$, D: $-1/6$.

3) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=1} f(z)dz$

Facciamo il conto in generale tenendo conto che dentro la circonferenza c'è solo la singolarità più vicina a $z = 0$. Partendo dallo sviluppo precedente, si ricava il residuo $\frac{AK}{z_1^2} + \frac{BK}{z_2^2}$ ricavabile anche attraverso il solito passaggio $Resf(0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}f(z)$. Nell'eseguire la derivata conviene osservare che la funzione è scrivibile come $\frac{2Kz^3}{(z-z_1)(z-z_2)} - \frac{K}{z^2}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$ si nota che la prima è olomorfa in $z = 0$ (contributo al residuo nullo) e la seconda ha un polo di ordine 2. Tenendo conto dei dati nei problemi A,B,C,D, gli integrali sono: A $-3i\pi/16$, B $-4i\pi/9$, C $3i\pi/16$, D $4i\pi/9$.

4) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=3} f(z)dz$

Qui entra in gioco la prima singolarità il cui residuo è $\frac{2z_1^3K}{z_1-z_2} - \frac{K}{z_1^2}\frac{1}{z_1-z_2}$ e sommando con il residuo già trovato si ottiene A $-63i\pi/16$, B $-17i\pi/18$, C $-65i\pi/16$, D $-19i\pi/18$

5) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=5} f(z)dz$

Qui intervengono tutte e tre le singolarità ma conviene vedere il cammino come contornante in senso orario il punto all'infinito e quindi cerchiamo il residuo nel punto all'infinito il cui sviluppo è $K(2z-\frac{1}{z^2})\Big(\frac{A}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z_1}{z})^k+\frac{B}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{z_1}{z})^k\Big)$ il cui residuo è $-2AKz_1-2BKz_2$. L'integrale è quindi $-2\pi iK(-2Az_1-2Bz_2)=4\pi$ per i compiti A e C e 2π per i compiti B e D

6) **(4)** Detta z_0 la singolarità più vicina a $z=0$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in z_0 e che converge per $0<|z-z_0|<|z_0|$

Bisogna sviluppare tutti i termini secondo $z-z_1$ (z_1 è detta z_0 nel testo). Si ha $z=(z-z_1)+z_1$. $-\frac{1}{z^2}=\frac{d}{dz}\frac{1}{z}=\frac{d}{dz}\frac{1}{z_1}\frac{1}{1+\frac{z-z_1}{z_1}}=\frac{d}{dz}\frac{1}{z_1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z_1-z)^k}{z_1^k}=\frac{1}{z_1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)(z_1-z)^k}{z_1^{k+1}}$ che converge per $|z-z_1|<|z_1|$

$\frac{B}{z-z_2}=\frac{B}{z_1-z_2}\frac{1}{1-\frac{z_1-z}{z_1-z_2}}=\frac{B}{z_1-z_2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z_1-z)^k}{(z_1-z_2)^k}$ che converge per $|z-z_1|<|z_1-z_2|$ e si ha $|z_1|<|z_1-z_2|$ in tutti e quattro i casi. Alla fine si ottiene

$$\Big(2(z-z_1)+2z_1+\frac{1}{z_1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)(z_1-z)^k}{z_1^{k+1}}\Big)\Big(\frac{A}{z_-z_1}+\frac{B}{z_1-z_2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z_1-z)^k}{(z_1-z_2)^k}\Big)K$$

Problema n.3 (10) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{\sqrt{2}+\sin t}dt.$

Con la solita sostituzione $z=e^{it}$ si arriva a $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{i}(z-\frac{1}{z})\frac{dz}{\pm z^2+2i\sqrt{a}z\mp 1}$ dove $a=2,5,.$

A. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1=-i\sqrt{5}+2i$ per cui si ha $I=2\pi i(Resf(0)+Resf(z_1))=2\pi-\pi\sqrt{5}$

B. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1=i\sqrt{2}-i$ per cui si ha $I=2\pi i(Resf(0)+Resf(z_1))=2\sqrt{2}\pi-2\pi$

C. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1=i\sqrt{5}-2i$ per cui si ha $I=2\pi i(Resf(0)+Resf(z_1)=\pi\sqrt{5}-2\pi$

D. Dentro il cechio di raggio 1 vi sono le due singolarità $z=0$, $z_1=-i\sqrt{2}+i$ per cui si ha $I=2\pi i(Resf(0)+Resf(z_1))=-2\sqrt{2}\pi+2\pi$

1º Esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica Compito (B)
27–01-07 A.A. 2007/2008

Si scrivano i passaggi essenziali negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (5) Siano z_1 e z_2 con $|z_1| > |z_2|$ le soluzioni della equazione $z^2 - z(2\sqrt{3} - i) - 2\sqrt{3}i = 0$. Si calcoli $(z_1 + 2z_2)^{23}$. Si mostrino i passaggi

$z_1 = 2\sqrt{3}$, $z_2 = -i$ per cui $z_1 + 2z_2 = 4(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$. $(z_1 + 2z_2)^{23} = 2^{46}e^{-4\pi i + i\frac{\pi}{6}} = 2^{46}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2})$

Problema n.2 (25) Sia data la funzione $(\frac{2z^3 - 1}{2z^2})\frac{1}{z^2 - 4z + 3}$.

1) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $1 < |z| < 3$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

2) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $0 < |z| < 1$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

3) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=1/2} f(z)dz$

4) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=2} f(z)dz$

5) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=4} f(z)dz$

6) **(3)** Detta z_0 la singolarità più vicina a $z = 0$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in z_0 e che converge per $0 < |z - z_0| < |z_0|$

Problema n.5 (10) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{2}-\sin t} dt$

$1^{\underline{o}}$ Esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica Compito (C)
27–01-07 A.A. 2007/2008

Si scrivano i passaggi essenziali negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (5) Siano z_1 e z_2 con $|z_1| > |z_2|$ le soluzioni della equazione $z^2 + z(2\sqrt{3} - i) - 2\sqrt{3}i = 0$. Si calcoli $(z_1 + 2z_2)^{16}$. Si mostrino i passaggi

$z_1 = -2\sqrt{3}$, $z_2 = i$ da cui $z_1 + 2z_2 = 4(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$. $(z_1 + 2z_2)^{23} = 2^{32}e^{16i\pi - i16\frac{\pi}{6}} = 2^{32}e^{-i\pi\frac{2}{3}} = 2^{32}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$

Problema n.2 (25) Sia data la funzione $(\frac{2z^3 - 1}{z^2})\frac{1}{z^2 + 6z + 8}$.

1) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $2 < |z| < 4$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

2) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $0 < |z| < 2$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

3) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=1} f(z)dz$

4) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=3} f(z)dz$

5) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=5} f(z)dz$

6) **(4)** Detta z_0 la singolarità più vicina a $z = 0$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in z_0 e che converge per $0 < |z - z_0| < |z_0|$

Problema n.5 (10) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{5}-\sin t}dt$

1º Esonero di Analisi II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica Compito (D)
27–01-07 A.A. 2007/2008

Si scrivano i passaggi essenziali negli spazi sottostanti. Non farlo comporta una penalizzazione

Problema n.1 (5) Siano z_1 e z_2 con $|z_1| > |z_2|$ le soluzioni della equazione $z^2 + z(2\sqrt{3} + i) + 2\sqrt{3}i = 0$. Si calcoli $(z_1 + 2z_2)^{17}$. Si mostrino i passaggi

$z_1 = -2\sqrt{3}$, $z_2 = -i$ da cui $z_1 + 2z_2 = 4(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = 4e^{i\frac{7\pi}{6}}$. $(z_1 + 2z_2)^{34} = 2^{34}e^{17i\pi + i17\frac{\pi}{6}} = -2^{34}e^{i\pi\frac{5}{6}} = 2^{34}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$

Problema n.2 (25) Sia data la funzione $(\frac{2z^3 - 1}{2z^2})\frac{1}{z^2 + 4z + 3}$.

1) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $1 < |z| < 3$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

2) **(6)** Si scriva lo sviluppo di Laurent centrato nel punto $z_0 = 0$ che converge nell'insieme $0 < |z| < 1$. Dello sviluppo di Laurent si calcoli il coefficiente c_{-2}.

3) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=1/2} f(z)dz$

4) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=2} f(z)dz$

5) **(3)** Si calcoli $\oint_{|z|=4} f(z)dz$

6) **(4)** Detta z_0 la singolarità più vicina a $z = 0$, si scriva lo sviluppo di Laurent centrato in z_0 e che converge per $0 < |z - z_0| < |z_0|$

Problema n.5 (10) Si calcoli l'integrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{5}+\sin t}dt$